www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE NAVALE

Concours 1989

Première composition de mathématiques

Durée : 3 heures

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I :

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On note $s_n = a_0 + ... + a_n$ les sommes partielles de la série de terme général a_n.

1. Comment exprime-t-on la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en utilisant la suite $(s_n)_{n \geq 0}$?

On dit que la série de terme général a_n converge en moyenne (ou au sens de Césaro) si la suite $(S_p)_{p \geq 1}$ converge, où S_p est défini par :

$$S_p = \frac{1}{p}\left(\sum_{n=0}^{p-1} s_n\right)$$

La limite est appelée somme au sens de Césaro de la série de terme général a_n.

2.a. Montrer que la série : $u = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ de terme général $u_n = (-1)^n$ converge en moyenne et calculer sa somme au sens de Cesaro.

2.b. Mêmes questions pour la série : $v = 1 + 0 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 + 0 - 1 + 0 + ...$ de terme général v_n tel que :

- $v_n = 1$ si $n \equiv 0\ [5]$
- $v_n = -1$ si $n \equiv 3\ [5]$
- $v_n = 0$ sinon

3. On associe à u et v les séries entières $u(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ et $v(x) = \sum_{n \geq 0} v_n x^n$, qui convergent pour $|x| < 1$.

Calculer explicitement $u(x)$ et $v(x)$ pour $|x| < 1$.

On remarquera que $v(x)$ s'écrit $v(x) = (1 - x^3).w(x)$ où $w(x)$ est une série entière que l'on calculera.

4. Calculer $\lim_{x \to 1} u(x)$ et $\lim_{x \to 1} v(x)$ où la variable x tend vers 1 par valeurs réelles inférieures ; justifier soigneusement le calcul dans le cas de $v(x)$.

Comparez les résultats obtenus à ceux de la question 2 (ceci est conforme à un théorème général dû à Frobenius).

.../...

Error

An error occurred while processing this page. See the system log for more details.

Error

An error occurred while processing this page. See the system log for more details.

6. Pour $c > 1$ on note $\chi_c(x)$ la fonction caractéristique de l'intervalle (ouvert) $]-c, c[$; autrement dit : $\chi_c(x) = 1$ si $|x| < c$ et $\chi_c(x) = 0$ si $|x| \geqslant c$.

$$\text{On pose : } \psi_c(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_c(x-y)\,\varphi(y)\,dy$$

Montrer que $\psi_c \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que $\psi_c(x) = 1$ si $|x| \leqslant c-1$ et $\psi_c(x) = 0$ si $|x| \geqslant c+1$.

Dessiner l'allure du graphe de la fonction ψ_c.

7. On pose $\alpha_\varepsilon(x) = \psi_2\left(\frac{3x}{\varepsilon}\right)$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

Montrer qu'il existe des constantes $c_n \geqslant 0$ telles que, pour $n \geqslant 0$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha_\varepsilon^{(n)}(x)| \leqslant \frac{c_n}{\varepsilon^n}$$

Pour quelles valeurs de x a-t-on $\alpha_\varepsilon(x) = 1$? $\alpha_\varepsilon(x) = 0$?

On note $\|.\|_k$ la norme associée à l'espace $C^k(\mathbb{R})$:

$$\text{Si } f \in C^k(\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \|f\|_k = \sup_{0 \leqslant j \leqslant k} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(j)}(x)|$$

8. Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \geqslant 0, \lim_{\varepsilon \to 0} \|\alpha_\varepsilon(x).x^{n+1}\|_n = 0$$

On utilisera pour ce faire la formule de Leibniz de dérivation du produit de deux fonctions.

On choisit une suite <u>décroissante</u> $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ $(\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > 0)$ telle que :

$$\|\alpha_{\varepsilon_n}(x).x^{n+1}\|_n \leqslant \frac{1}{|a_{n+1}|} \text{ si } |a_{n+1}| \geqslant 1$$
$$\leqslant 1 \text{ si } |a_{n+1}| \leqslant 1$$

où $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est la suite considérée dans l'énoncé du théorème.

$$\text{On pose : } f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\varepsilon_{n-1}}(x).a_n.\frac{x^n}{n!}$$

9. Justifier cette écriture en montrant que la série qui apparaît au second membre converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

On décompose f sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f_p(x) + r_p(x)$$

$$\text{où} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad f_p(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{p} \alpha_{\varepsilon_{n-1}}(x).a_n.\frac{x^n}{n!}$$

10. Que vaut $f_p(x)$ pour $|x| \leqslant \varepsilon_p / 3$?

11. Montrer, en utilisant 8 et le choix de la suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ que $r_p(x) \in C^p(\mathbb{R})$ et que $r_p^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, 1..., p$.

En déduire que $f \in C^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et que f permet de démontrer le théorème de réalisation de Borel.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail